

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

BAREM

CLASA A X-A

(4 ore/săptămână)

1.)	Din oficiu	1p
	<p>Fie $z_1 = \sqrt{3} + i$ și $z_2 = 1 - i$</p> <p>$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$</p> <p>$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{19\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{19\pi}{12} \right) \right)$</p> <p>Deci $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	<p>Observăm că $z^{12} = 2^6 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -64$</p> <p>Ecuția devine $x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$ adică $x_1 = 4$</p> <p>$x^2 + 4x + 16 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3}i$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2.)	Din oficiu	1p
	<p>Ecuția inițială este echivalent cu $\log_2(x+1) \cdot \log_2(x-1) = \log_2((x+1)^2 \cdot (x-1)) - 2$</p> <p>Domeniul de definiție a ecuației este $D = [1, +\infty)$</p> <p>Notăm $\log_2(x+1) = a, \log_2(x-1) = b$</p> <p>Ecuția de mai sus se transcrie $a \cdot b = 2a + b - 2$</p> <p>$\Leftrightarrow (a-1)(b-2) = 0$</p> <p>de aici găsim $a = 1$ sau $b = 2$</p> <p>Dacă $a = 1$, atunci $x = 1$ ceea ce nu aparține lui D.</p> <p>Dacă $b = 2$, atunci $x = 5, 5 \in D$, deci $M = \{5\}$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
3.)	Din oficiu	1p
	<p>Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6$ atunci se observă ușor că $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$.</p> <p>Astfel ecuația din enunț este echivalent cu $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x$ (1)</p> <p>Arătăm, că relația de mai sus este adevărat numai dacă $f(x) = x$.</p> <p>Deoarece funcția f este strict crescătoare, pentru $f(x) < x$ avem $f(f(x)) < f(x) < x$ ceea ce este fals conform relației (1), pe de altă parte pentru $f(x) > x$ avem $f(f(x)) > f(x) > x$ ceea ce nu corespunde lui (1)</p> <p>Rezultă: $f(x) = x$</p> <p>Deci $x^3 - 6 = x \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$</p> <p>ecuația care are singura soluție $x = 2$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

4.)	Din oficiu	1p
a)	$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)$ $ z_1 + z_2 + z_3 ^2 = 2 z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 $ $2 z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 2 \cdot \left(\frac{ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 }{ z_1 z_2 z_3 } \right) =$ $= 2 \left \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right = 2 \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} $ $2 \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 2 \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 2 z_1 + z_2 + z_3 $ <p>Deci $z_1 + z_2 + z_3 ^2 = 2 z_1 + z_2 + z_3$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$</p> <p>Rezultă $z_1 + z_2 + z_3 = 2$</p>	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
b)	$z = a + bi, a, b \in R.$ $ z ^2 + \overline{z} = 1 - i \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a - bi = 1 - i$ $b = 1, a^2 + a = 0 \Rightarrow a = -1, a = 0$ $z_1 = -1 + i, z_1^2 = -2i, z_1^4 = -4, z_1^{8n} = (z_1^4)^{2n} = 16^n$ $z_2 = i, z_2^{8n} = (z_2^4)^{2n} = 1$	1p 1p 1p 1p